DODATEK 1. OKRĘGI RÓWNOWAGI

Dane: x — zagłębienie w środku lustra, h — grubość lustra na środku, D — średnica lustra, $\boldsymbol{\varphi}$ — średnica otworu w środku lustra.

Założenia:

1. Gęstość szkła jest stała.
2. Figura górnej powierzchni lustra jest idealną paraboloidą obrotową.
3. Nie uwzględniamy fazki na brzegu lustra.

A. Przypadek 3 i 6 punktów ($m_1 = m_2$)

W tym przypadku $V_1 = V_2$, ale $V = V_1 + V_2$, gdzie V jest objętością całej płyty. Z tego wynika, że:

$$V = 2V_1 \tag{1}$$

Z twierdzenia statyki (Pappusa – Guldina) wynika, że $V = 2\pi S x_0$, a $V_1 = 2\pi S_1 x_e$, gdzie x_0 i x_e są odległościami środków ciężkości powierzchni przekrojów poprzecznych S i S_1 od środka lustra. Zatem:

$$x_0 = 2x_e \tag{2}$$

Z kolei z definicji środka ciężkości mamy:

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{s_1 x_1 + \ldots + s_n x_n}{s} \tag{3}$$

gdzie granica w liczniku jest momentem statycznym M pola figury S.

Zatem z (1) i (2) uwzględniając (3), mamy:

$$M = 2M_1 \tag{4}$$

Obliczmy momenty M dla S i S_1. Równanie opisujące górną krawędź przekroju lustra jest równaniem paraboli: $y = kx^2 + h$, gdzie $k = 4h / D^2$, zatem momenty będą wynosiły odpowiednio:

$$\text{Dla pola } S, \quad M = \int_0^{D/2} (kx^2 + h)x\,dx = k\frac{x^4}{4}\bigg|_0^{D/2} + h\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{D/2} = k\frac{D^4}{64} + h\frac{D^2}{8}$$

$$\text{Dla pola } S_1, \quad M_1 = \int_0^{r_{eq}} (kx^2 + h)x\,dx = k\frac{x^4}{4}\bigg|_0^{r_{eq}} + h\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{r_{eq}} = k\frac{r_{eq}^4}{4} + h\frac{r_{eq}^2}{2}$$

Wstawiając uzyskane formuły do równania (4) mamy:

$$k\frac{D^4}{64} + h\frac{D^2}{8} = k\frac{r_{eq}^4}{2} + hr_{eq}^2$$

Kładąc $r_{eq}^2 = u_e$ i porządkując powyższe równanie dostajemy:

$$k\frac{u_e^4}{2} + hu_e^2 - \left(k\frac{D^4}{64} + h\frac{D^2}{8}\right) = 0 \tag{5}$$

Równanie (5) jest równaniem kwadratowym na zmienną u, więc można je analitycznie rozwiązać:

$$\Delta u_e = h^2 + 2k\left(k\frac{D^4}{64} + h\frac{D^2}{8}\right)$$

Interesuje nas pierwiastek dodatni na r_{eq}, czyli:

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{h^2 + \frac{k^2D^4}{32} + \frac{khD^2}{8}}}{k}}$$

B. Przypadek dla 3 i 6 punktów z otworem o średnicy ϕ

W przypadku gdy w centrum płyty jest otwór, równanie (4) pozostaje w mocy, zmienią się jedynie dolne granice całkowania przy wyliczaniu momentów M, a mianowicie:

Dla pola S, $$M = \int_{\phi/2}^{D/2}(kx^2 + h)x\,dx = k\frac{x^4}{4}\bigg|_{\phi/2}^{D/2} + h\frac{x^2}{2}\bigg|_{\phi/2}^{D/2} = k\frac{D^4 - \varphi^4}{4} + h\frac{D^2 - \phi^2}{8}$$

Dla pola S_1, $$M_1 = \int_{\phi/2}^{r_{eq}}(kx^2 + h)x\,dx = k\frac{x^4}{4}\bigg|_{\phi/2}^{r_{eq}} + h\frac{x^2}{2}\bigg|_{\phi/2}^{r_{eq}} = k\frac{16r_{eq}^4 - \phi^4}{64} + h\frac{4r_{eq}^2 - \phi^2}{8}$$

Odpowiednie równanie kwadratowe, wynikające ze wstawienia powyższych formuł oraz uwzględnieniu równania (4), nieco się skomplikuje:

$$\frac{k}{2}r_{eq}^4 + hr_{eq}^2 - k\left[\frac{D^4 - \phi^4}{64}\right] - h\left[\frac{D^2 - \phi^2}{8}\right] - \frac{k\varphi^2}{4}\left(\frac{k\varphi^2}{8} + h\right) = 0 \qquad (6)$$

Uwzględniając $u_e = r_{eq}^2$ otrzymujemy równanie kwadratowe i możemy obliczyć deltę:

$$\Delta u_e = h^2 + k^2\left[\frac{D^4 - \phi^4}{32}\right] + hk\left[\frac{D^2 - \phi^2}{4}\right] + \frac{k\varphi^2}{2}\left[\frac{k\varphi^2}{8} + h\right]$$

Stąd wyliczamy pierwiastek dodatni, będący rozwiązaniem:

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{h^2 + k^2\left(\frac{D^4 - \varphi^4}{32}\right) + hk\left(\frac{D^2 - \varphi^2}{4}\right) + \frac{k\varphi^2}{2}\left(\frac{k\varphi^2}{8} + h\right)}}{k}}$$

C. Przypadek 9 i 18 punktów dla pełnej płyty $m_1 = 2m_2$

Jest to przypadek bardziej skomplikowany, gdyż musimy znaleźć dwa okręgi równowagi. Postępujemy tutaj dwuetapowo. Najpierw znajdujemy pośredni okrąg równowagi r_e z warunku $m_1 = 2m_2$, czyli $V = 3V_1$, a co za tym idzie:

$$M = 3M_1 \qquad (7)$$

Formuły na M i M_1 są identyczne jak w punkcie **A** artykułu, zmieni się nieco tylko równanie kwadratowe uzyskane z rozpisania formuły (7):

$$\frac{k}{2}u_e^2 + hu_e - \frac{k}{3}\left[\frac{k}{32}D^4 + \frac{h}{4}D^2\right] = 0 \qquad (8)$$

Delta dla równania (8) wyniesie:

$$\Delta u_e = h^2 + \frac{k}{3}\left(\frac{k}{16}D^4 + \frac{h}{2}D^2\right)$$

a stąd dodatni pierwiastek na r_{eq}:

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{h^2 + \frac{k^2 D^4}{48} + \frac{khD^2}{6}}}{k}}$$

Okrąg o promieniu r_{eq} dzieli płytę na dwie podpierane części. W drugim etapie, dla każdej z tych części musimy wyliczyć jej własny okręg równowagi, zgodnie z założeniem zawartym w równaniu (1) i w analogiczny sposób jak dla płyty na 3 i 6 punktach. Znajdźmy zatem najpierw promień zewnętrznego okręgu równowagi r_{eq2} i wewnętrznego r_{eq1} przy obliczonym r_{eq}.

1. Zewnętrzny okrąg równowagi r_{eq2}

$$M_{zew} = 2M_2 \tag{9}$$

Dla pola S_{zew}, $M_{zew} = \int_{r_{eq}}^{D/2} (kx^2 + h)x\,dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_{r_{eq}}^{D/2} + h\left.\frac{x^2}{2}\right|_{r_{eq}}^{D/2} = k\frac{D^4 - 16r_{eq}^4}{64} + h\frac{D^2 - 4r_{eq}^2}{8}$

Dla pola S_2, $M_2 = \int_{r_{eq}}^{r_{eq2}} (kx^2 + h)x\,dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_{r_{eq}}^{r_{eq2}} + h\left.\frac{x^2}{2}\right|_{r_{eq}}^{r_{eq2}} = k\frac{r_{eq2}^4 - r_{eq}^4}{4} + h\frac{r_{eq2}^2 - r_{eq}^2}{2}$

Po wstawieniu do wzoru (9) i uporządkowaniu mamy:

$$\frac{k}{2}(u_2)^2 + hu_2 - \left[k\left(\frac{D^4 - 16r_{eq}^4}{64}\right) + h\left(\frac{D^2 - 4r_{eq}^2}{8}\right)\right] - \left(k\frac{r_{eq}^4}{2} + hr_{eq}^2\right) = 0 \tag{10}$$

gdzie: $u_2 = r_{eq2}^2$; delta dla równania (10) wynosi:

$$\Delta u_2 = h^2 + k^2\left(\frac{D^4 - 16r_{eq}^4}{32}\right) + hk\left(\frac{D^2 - 4r_{eq}^2}{4}\right) + k^2 r_{eq}^4 + 2khr_{eq}^2$$

$$r_{eq2} = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{h^2 + k^2\left(\frac{D^4}{32} - \frac{r_{eq}^4}{2}\right) + hk\left(\frac{D^2}{4} - r_{eq}^2\right) + k^2 r_{eq}^4 + 2khr_{eq}^2}}{k}}$$

2. Wewnętrzny okrąg równowagi r_{eq1}

$$M_{wew} = 2M_1 \tag{11}$$

Dla pola S_{wew}, $M_{wew} = \int_{0}^{r_{eq}} (kx^2 + h)x\,dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{r_{eq}} + h\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{r_{eq}} = k\frac{r_{eq}^4}{4} + h\frac{r_{eq}^2}{2}$

$$\text{Dla pola } S_1, \quad M_1 = \int_0^{r_{eq1}} (kx^2 + h)x\,dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{r_{eq1}} + h\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{r_{eq1}} = k\frac{r_{eq1}^4}{4} + h\frac{r_{eq1}^2}{2}$$

Kładąc $u_1 = r_{eq1}^2$, mamy:

$$ku_1^2 + 2hu_1 - r_{eq}^2\left(\frac{k}{2}r_{eq}^2 + h\right) = 0 \tag{12}$$

Delta dla równania (12) wynosi:

$$\Delta u_1 = 4h^2 + 4kr_{eq}^2\left(\frac{k}{2}r_{eq}^2 + h\right)$$

$$r_{eq1} = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{h^2 + \frac{k^2 r_{eq}^4}{2} + khr_{eq}^2}}{k}}$$

D. Przypadek dla 9 i 18 punktów z otworem w płycie o średnicy ϕ

W pierwszym etapie jest to sytuacja analogiczna do przypadku **B**. Równania na momenty będą takie same, jak w **B**. Zmieni się jedynie równanie kwadratowe na r_1 z powodu użycia formuły (7).

$$M = 3M_1$$

$$\frac{k}{2}u_e^2 + hu_e - \left(\frac{k\varphi^4}{32} + \frac{h\varphi^2}{4}\right) - \frac{1}{12}\left[\frac{k}{8}(D^4 - \varphi^4) + h(D^2 - \varphi^2)\right] = 0 \tag{13}$$

$$\Delta u_e = h^2 + \frac{k^2}{48}(D^4 - \varphi^4) + \frac{kh}{6}(D^2 - \varphi^2) + \frac{k^2\varphi^4}{16} + \frac{hk\varphi^2}{2}$$

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{h^2 + \frac{k^2}{48}(D^4 - \varphi^4) + \frac{kh}{6}(D^2 - \varphi^2) + \frac{k^2\varphi^4}{16} + \frac{hk\varphi^2}{2}}}{k}}$$

1. Zewnętrzny okrąg równowagi r_{eq2}

Dla zewnętrznego okręgu równowagi wzory na M i r_{eq1} są takie same. Również takie samo jest równanie kwadratowe na r_{eq1}. Oczywiście liczbowo rozwiązanie będzie inne, ze względu na inną wartość r_{eq}.

2. Wewnętrzny okrąg równowagi r_{eq1}

Dla wewnętrznego okręgu równowagi mamy następujące równania na momenty M:

$$\text{Dla pola } S_{\text{wew}}, \quad M_{\text{wew}} = \int_{\phi/2}^{r_{eq}} (kx^2 + h)x\,dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_{\phi/2}^{r_{eq}} + h\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\phi/2}^{r_{eq}} = k\frac{16r_{eq}^4 - \phi^4}{64} + h\frac{4r_{eq}^2 - \varphi^2}{8}$$

$$\text{Dla pola } S_1, \quad M_1 = \int_{\phi/2}^{r_{eq1}} (kx^2 + h)x\,dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_{\phi/2}^{r_{eq1}} + h\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\phi/2}^{r_{eq1}} = k\frac{16r_{eq1}^4 - \phi^4}{64} + h\frac{4r_{eq1}^2 - \varphi^2}{8}$$

Wstawiając je do równania (11), kładąc $r_{eq1}^2 = u_1$ i porządkując, otrzymujemy równanie kwadratowe na u_1:

$$\frac{k}{2}u_1^2 + hu_1 - \left[\left(\frac{k\varphi^4}{32} + \frac{h\varphi^2}{4}\right) + \frac{k}{64}(16r_{eq}^4 - \varphi^4) + \frac{h}{8}(4r_{eq}^2 - \varphi^2)\right] = 0 \qquad (14)$$

$$\Delta u_1 = h^2 + \frac{k^2}{32}(16r_{eq}^4 - \varphi^4) + \frac{kh}{4}(4r_{eq}^2 - \varphi^2) + \frac{k\varphi^2}{2}\left(h + \frac{k\varphi^2}{8}\right)$$

$$r_{eq1} = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{h^2 + \frac{k^2}{32}(16r_{eq}^4 - \varphi^4) + \frac{kh}{4}(4r_{eq}^2 - \varphi^2) + \frac{k\varphi^2}{2}\left(h + \frac{k\varphi^2}{8}\right)}}{k}}$$

Lucjan Newelski
Tomasz Krzyt